Suites définies par récurrence – problèmes standard

Ce fichier d'exercices fait suite à la vidéo [S-T1] suites : petite étude (lien Youtube).

Plusieurs méthodes différentes, vues ou non dans la vidéo, sont présentées ici, pour attaquer les suites du type $u_{n+1}=f(u_n)$.

Ces méthodes sont : récurrences, inégalités, monotonie, théorèmes de convergence.

L'exercice est classique, avec toutes les questions intermédiaires usuelles, sauf qu'ici plusieurs méthodes sont proposées pour chaque question

Cet exercice constitue une bonne révision globale pour les élèves de Terminale spécialité maths. Il peut aussi être utile pour des L1/prépa ayant vraiment tout oublié sur les suites récurrentes…

1. **M**éthode 1 $\boxed{\text{avec une récurrence}}$.
   On définit la suite (u_n) par : $u_{n+1}=4u_n+2$ et $u_0=0$
   a. Calculer u_1, u_2 (en calcul mental).
   b. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n>-\frac{2}{3}$.
   c. Démontrer par récurrence sur n que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}>u_n$.
   d. Supposons que (u_n) converge vers un réel ℓ, donner la valeur de ℓ.
   e. (u_n) est-elle convergente ? divergente ?
2. **M**éthode 2 $\boxed{\text{avec le signe de } f(x)-x}$ sur une suite arithmético-géométrique.
   On définit la suite (u_n) par : $u_{n+1}=\frac{u_n}{3}+6$ et $u_0=27$.
   a. Calculer u_1, u_2 (en calcul mental).
   b. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n\geq 9$.
   c. Donner le signe de $f(x)-x$ suivant x, sachant que f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x}{3}+6$.
   d. Démontrer sans récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}<u_n$.
   e. Supposons que (u_n) converge vers un réel ℓ, donner la valeur de ℓ.
   f. (u_n) est-elle convergente ? divergente ?
3. **M**éthode 3 $\boxed{\text{avec les variations de } f}$ sur une suite homographique.
   On considère la suite $u_0=0$ et $u_{n+1}=\frac{4u_n+3}{u_n+2}$.
   a. Calculer mentalement u_1, u_2.
   b. Vérifier que la suite est toujours défine, i.e. que u_n ne vaut jamais -2.
      Indication : prouver par une récurrence simple que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n\geq 0$.
   c. Donner le tableau de variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction f définie par $f(x)=\frac{4x+3}{x+2}$.
   d. Montrer par récurrence que pour tout entier n, on a $0\leq u_n\leq 3$.
   e. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.
      Indication : montrer que $u_{n+1}\geqslant u_n$ par récurrence en utilisant le fait que $f\nearrow$.
   f. La suite (u_n) est-elle convergente ou divergente ? Si elle converge, déterminer sa limite.
4. **M**éthode 4 $\boxed{\text{avec une suite auxiliaire}}$ sur une suite arithmético-géométrique.
   On définit la suite (u_n) par : $u_{n+1}=0.4\times u_n+6$ et $u_0=-10$.
   a. Calculer mentalement u_1, u_2.
   b. Pour tout $n\geq 0$ on pose $v_n=u_n-10$. Calculer mentalement v_0, v_1, v_2.
   c. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et donner son terme général.
   d. En déduire le terme général de (u_n), puis les variations et la convergence de (u_n).
5. **S**uites arithmético-géométriques, une autre situation : les « toiles d'araignées ».

On définit la suite (u_n) par : $u_{n+1} = -\frac{u_n}{3} + 16$ et $u_0 = 21$.

a. Calculer mentalement u_1, u_2.

b. Démontrer que $u_n > 12 \Rightarrow u_{n+1} < 12$.

c. Étudier comme précédemment la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 12$ et conclure.